www.statistik-von-null-auf-hundert.de

12 Kombinatorik

Prof. Dr. rer. nat. Claus Brell
Hochschule Niederrhein
Stand: 10.04.2014

Definition:
Kombinatorik ist die Lehre des Zählens.

Gegenstand:
- Ermittlung der Anzahl möglicher Anordnungen
- von unterschiedlichen oder ununterscheidbaren Objekten,
- Mit Beachtung der Reihenfolge oder ohne.

Anwendung:
Die Kombinatorik hat zahlreiche Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik wie Geometrie, **Wahrscheinlichkeitstheorie**, Algebra, Mengenlehre und Topologie, in der Informatik (z. B. Kodierungstheorie) und der theoretischen Physik (z.B. statistische Mechanik).

Rechenregeln:
Die Kombinatorik umfasst sechs Rechenregeln:
Variationsregeln 1 und 2,
Permutationsregel und
Kombinationsregeln 1, 2 und 3.

Ein Hiphopfan besitzt k=3 Hoodies, gelb, grau und blau.

Nur damit läuft er herum (natürlich zusätzlich zu einer Hose).
Oft zieht er das gleiche auch mehrere Tage hintereinander an.

Es vergeht eine Woche mit n=7 Tagen.
Wieviel unterschiedliche Möglichkeiten (Varianten, Variationen) gibt es für die Anordnung seiner Oberbekleidung?

Beispiele:
gelb-gelb-blau-grau-gelb-grau-grau
oder
blau-blau-blau-blau-blau-blau-grau
oder
…..

Systematisch:

Erster Tag:	blau oder gelb oder grau (3 Möglichkeiten)
Zweiter Tag:	blau oder gelb oder grau (3 Möglichkeiten, mit Vortag 3*3=9)
Dritter Tag:	blau oder gelb oder grau (3 Möglichkeiten, mit Vortagen 3*3*3=27)
….	
Siebter Tag:	blau oder gelb oder grau (mit Vortagen 3*3*3*3*3*3*3=3^7=2187)

Anzahl mögliche Ereignisse (Hoodie auswählen):	k=3
Anzahl Versuche (Tage der Woche):	n=7

Weiteres Beispiel: n=2 Würfelwürfe mit k=6 möglichen Würfelergebnissen.
Insgesamt 6*6=k^n mögliche Ereignisabfolgen.

Variationsregel 1:
(Spezialfall von Variationsregel 2)

Bei n Versuchen mit k Ereignissen gibt es k^n Ereignisabfolgen.

Ein Hiphopfan besitzt k_1=3 Hoodies, gelb, grau und blau und k_2=2 Paar Turnschuhe (schwarz und weiß). Er zieht n=zweimal aus dem Kleiderschrank, einmal aus den Hoodies und einmal aus den Turnschuhen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, Turnschuhe und Hoodie zu kombinieren?

Gelb-schwarz
Gelb-weiß
Grau-schwarz
Grau-weiß
Blau-schwarz
Blau-weiß

Anzahl Möglichkeiten bei n=2 Versuchen:
$3*2=k_1*k_2$

Weiteres Beispiel:
n=3 Versuche mit Würfel (k_1=6), Münze (k_2=2) und DreierDrehscheibe (k_3=3).
Insgesamt 6*2*3=12 mögliche Ereignisabfolgen.

Variationsregel 2:

Bei n Versuchen mit jeweils k_i Ereignissen gibt es
$k_1 * k_2 * k_3 * \ldots * k_n$ mögliche Ereignisabfolgen.

Bei Variationsregel 1 ist, als Spezialfall von Variationsregel 2, $k_1=k_2=...=k_n=k$

Ein Hiphopfan besitzt drei Hoodies, gelb, grau und blau.
Er möchte jeden Tag alle drei einmal anhaben.
Welche Reihenfolgen gibt es?

Hätte er nur ein Hoodie:
gelb
also 1 Möglichkeit

Hätte er nur zwei Hoodies:
gelb-grau,
grau-gelb
also 2=1*2=2! Möglichkeiten

Er hat drei Hoodies:
gelb-grau-blau, gelb-blau-grau,
blau-gelb-grau, blau-grau-gelb
grau-gelb-blau, grau-blau-gelb
also 6=1*2*3 =3! Möglichkeiten

Permutationsregel:

k verschiedene Objekte können in k! verschiedene Reihenfolgen angeordnet werden.

Ein Hiphopfan besitzt n=3 Hoodies, gelb, grau und blau. Die Hoodies sollten einmal gewaschen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, k=2 aus n=3 nacheinander zu waschen, also 2 aus 3 auszuwählen, **wobei die Reihenfolge wesentlich ist**?

Möglichkeiten: blau-grau oder gelb-grau oder blau-gelb oder grau-blau oder grau-gelb oder gelb-blau.
Also 6 Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge der Auswahl wesentlich ist.

Anzahl der Möglichkeiten: $6=(3*2*1)/((3-2)*1)=3!/(3-2)!=n!/(n-k)!$

Kombinationsregel 1:

k verschiedene Objekte können aus n verschiedenen auf

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

verschiedene Weisen ausgewählt werden.

Ein Hiphopfan besitzt n=3 Hoodies, gelb, grau und blau. Die Hoodies sollten einmal gewaschen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, k=2 aus n=3 **in beliebiger Reihenfolge** zu waschen, also 2 aus 3 auszuwählen?

Möglichkeiten: blau-grau oder **gelb-grau** oder blau-gelb oder grau-blau oder **grau-gelb** oder gelb blau.
Also 6 Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge der Auswahl wesentlich ist. **Da jedes Pärchen doppelt vorkommt gibt es nur 6/2 unterschiedliche Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge unwesentlich ist.**

Anzahl der Möglichkeiten: **3=**6**/2**=(3*2*1)/(**2**(3-2))=3!/(**2!**(3-2)!)=n!/k!/(n-k)!

Kombinationsregel 2:

Es gibt

$$\frac{n!}{\boldsymbol{k}!\,(n-k)!}$$

Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

$\frac{n!}{\boldsymbol{k}!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ **heißt auch Binomialkoeffizient.**

Ein Hiphopfan besitzt **n=8** CDs und **m=3** farbige Auto-CD-Hüllen mit **k_j=2,4,2** Fächern. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die CDs in die Hüllen zu verteilen? Innerhalb der CD-Hüllen ist die Sortierung unwesentlich.

CD Hülle j=1 mit k_j=2 Möglichkeiten: $\binom{n}{k_j} = \frac{n!}{\boldsymbol{k}!(n-k)!} = \frac{8!}{\mathbf{2}!(8-2)!}$

es bleiben noch $n-k_1$=8-2=6 Cds übrig.

CD Hülle j=2 mit k_j=4 Möglichkeiten: $\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(8-2)!}{\mathbf{4}!(8-2-4)!}$

es bleiben noch $n-k_1-k_2$=8-2-4=2 Cds übrig.

CD Hülle j=3 mit k_j=2 Möglichkeiten: $\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \frac{(8-2-4)!}{\mathbf{2}!(8-2-4-2)!}$

Anzahl der Möglichkeiten: Produkt der drei Aufteilungen mit (8-2-4-2)!=0!=1

$$\frac{8!}{\mathbf{2}!(8-2)!} * \frac{(8-2)!}{\mathbf{4}!(8-2-4)!} * \frac{(8-2-4)!}{\mathbf{2}!(8-2-4-2)!} = \frac{8!}{\mathbf{2}!*4!*2!} = \frac{n!}{k1!*k2!*k3!}$$

Kombinationsregel 3:

Es gibt für n verschiedene Objekte

$$\frac{n!}{k_1! * k_2! * \cdots * k_m!}$$

Möglichkeiten, diese auf m Gruppen mit den jeweiligen Anzahlen $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ aufzuteilen. Innerhalb der Gruppen ist die Reihenfolge egal.

- letzte Folie Kombinatorik -